myślenie. Weźmy na to, rozważa, że tablica na drzwiach nr 2 jest Hansa, czyli zdanie na niej jest prawdziwe. Czyli zdanie na drzwiach nr 1 musi być nieprawdziwe, tablica pochodzi od Franza, a samochód naturalnie jest za drzwiami nr 1!
Jednak również tym razem Bernd się nie spieszy i sprawdza sytuację przeciwną. Co, jeśli szyld na drzwiach nr 2 namalował Franz? Wtedy zdanie jest nieprawdziwe, to znaczy, że prawdę zawiera więcej niż jedna tabliczka. Wtedy szyld na drzwiach nr 1 musi zawierać nieprawdę, on też jest od Franza – a samochód jest za drzwiami nr 1.
Na twarzy Weißbrota pojawia się szeroki uśmiech. Samochód należy do niego! Nie czeka wcale na to, co zrobi prezenterka, zrywa się ze swojego miejsca, rzuca do drzwi, otwiera drzwi nr 1 – a tam meczy na niego koza.
– To… to nie może być prawda! – bełkocze Weißbrot. – Moja logika była przecież bez zarzutu! Samochód musiał stać za tymi drzwiami! To oszustwo! Wykantowaliście mnie!
Ale reżyser puścił już zakończenie, muzyka staje się głośniejsza, kamera zwraca się ku radośnie uśmiechającej się Babsi Schönwald, która żegna się właśnie do następnego razu. W tle widzimy, jak zza kulis wychodzi Hans i najłagodniej, jak tylko może, wyprowadza ze sceny ciągle jeszcze wściekłego kandydata. A Franz stoi obok i rzuca Weißbrotowi diaboliczne spojrzenie.

O PRAWDZIE I DOWODLIWOŚCI Co, na wszystkie świętości, Bernd Weißbrot zrobił źle? Gdzie skrywa się błąd logiczny? Podstęp ukryty jest w wypowiedzi na drzwiach nr 2: „Dokładnie jedna z tabliczek zawiera zdanie prawdziwe". To zdanie odnosi się do samego siebie, mówimy, że jest autoreferencyjne, to znaczy, że między innymi zawiera wypowiedź o własnej prawdziwości. Takie zdania w logice są problematyczne, a rozprawianie się z nimi to więcej niż dzielenie włosa na czworo. Zdania autoreferencyjne w poprzednim stuleciu co najmniej dwa razy zatrzęsły podstawami matematyki. Raz w 1903 roku, kiedy to autonomia Russella pokazała, że zbiorów nie można tworzyć w sposób „naiwny" (patrz s. 121). A kiedy tylko matematycy połatali teorię, uwolniwszy ją od takich sprzeczności, pojawił się w 1931 roku Kurt Gödel i znowu za pomocą zdania odnoszącego się do samego siebie pokazał im, że nadzieja udowodnienia lub obalenia wszystkich twierdzeń za pomocą stojącej na pewnym fundamencie matematyki była iluzoryczna.

W tym rozdziale chciałbym pokazać, jak można rozumieć odkrycie Gödla, prawdopodobnie największe w matematyce XX wieku. Wiem, że mam wysokie ambicje – zapnij więc pasy, czytelniku, wzlatujemy na wysokości logiki!

Zacznijmy jednak od bardzo prostej zabawy w językowe poplątanie. Paradoks cyrulika po lekturze poprzednich rozdziałów prawdopodobnie już cię nie zadziwi. Gdy obedrzemy go ze wszystkich metafor o goleniu, zobaczymy, że chodziło o to, że ktoś twierdzi, że w tym momencie kłamie. Albo gdy zredukujemy to jeszcze bardziej, zdanie stwierdza swoją własną nieprawdziwość:

To zdanie jest fałszywe.

Zapisując to symbolami logicznymi, otrzymujemy:

$A \leftrightarrow \neg A$

Jeżeli to zdanie jest prawdziwe, to jest fałszywe, a jeżeli jest fałszywe, to jest prawdziwe. Można paradoksalność sytuacji trochę odwlec, tworząc pętlę z dwóch, odnoszących się do siebie zdań. Na przykład za pomocą wizytówki, na której na jednej stronie umieszczono następujące zdanie:

Zdanie
po drugiej stronie
mówi prawdę.

A obracając wizytówkę czytamy:

Zdanie
po drugiej stronie
mówi nieprawdę.

Temu odpowiadają następujące równania logiczne:

$A \leftrightarrow B$
$B \leftrightarrow \neg A$

Widzimy, że również tutaj *A* jest równoznaczne z nie-*A*, drogą okrężną, poprzez równoważność ze zdaniem *B*. Zaczynając pętlę od *B*, dochodzimy do wniosku, że również to zdanie jest równoznaczne ze swoim zaprzeczeniem.
Wszystkie te zdania mają jedno wspólne: wypowiadają się tylko na temat własnej wartości logicznej, a nie na temat jakiejś obiektywnej rzeczywistości. Wartość logiczna jednak określana jest właśnie poprzez samą wypowiedź. I tu kot sobie nadeptuje na ogon. Logik Raymund Smullyan, który jest autorem wielu przykładów w naszej książeczce, określa zdania odnoszące się do obiektywnych faktów jako „dobrze ugruntowane" (*well grounded*). I tak zdanie „Hans namalował dokładnie jedną z tabliczek" jest oparte na faktach, ponieważ odnosi się do zdarzenia z przeszłości, któ-

re albo miało miejsce, albo nie. Zdanie „Dokładnie jedna z obu tabliczek zawiera zdanie prawdziwe" natomiast nie jest oparte na faktach – nawet wtedy, gdy wypowiedź na *drugiej* tabliczce opiera się na faktach.

Nie każde nieoparte na faktach zdanie musi prowadzić do sprzecznej pętli logicznej. W ostatnim zadaniu teleturnieju mamy do czynienia z wolną od sprzeczności interpretacją logiczną tabliczek – a mianowicie interpretacją pana Weißbrota: samochód stoi za drzwiami nr 1, autorem tabliczki na drzwiach nr 1 jest Franz, czyli zawiera ona nieprawdziwą wypowiedź. Wtedy autorem tabliczki na drzwiach nr 2 może być Hans albo Franz, czyli prawda albo fałsz.

Ale co, jeśli Hans namalował tabliczkę na drzwiach nr 1, czyli samochód stoi za drzwiami nr 2? Wtedy zdanie na drzwiach nr 2 jest prawdziwe, gdy jest fałszywe, a fałszywe, gdy prawdziwe. Pytanie brzmi: kto mógłby namalować taki szyld? Obaj, twierdzę – zakładając, przyznaję, wielkoduszną wykładnię warunków naszej historyjki – a mianowicie, że wypowiedzi Hansa wtedy są prawdziwe, *gdy ich prawda jest rozstrzygalna* – w przeciwnym wypadku mówi wszystko, co tylko możliwe, czyli „Dzień dobry!", „Jest jeszcze kawa?", wolno mu też wypowiadać zdania paradoksalne. To samo obowiązuje z odwrotnym znakiem dla Franza. A wtedy każdy z nich, dla kawału, mógł namalować drugą tablicę.

Zdania autoreferencyjne można nawet wykorzystywać w celu udowodnienia każdego możliwego twierdzenia, na przykład, że Angela Merkel[1] jest cesarzową chińską.

Jeśli to zdanie jest prawdziwe, to Angela Merkel jest cesarzową chińską.

---

1 Angela Merkel – obecna kanclerz Niemiec (przyp. tłum.).

Uwaga – nie chodzi o całą wypowiedź, a jedynie o drugą część zdania!
Dowiedziemy tego ściśle według zasad, których nauczyliśmy się w rozdziale 2. A niech oznacza całe zdanie, B zaś „Angela Merkel jest cesarzową chińską".

1. $A \leftrightarrow (A \rightarrow B)$

To sformułowanie auoreferencyjne: „To zdanie" jest częścią samego siebie.

2. $A \rightarrow A$

Obowiązuje to dla *dowolnego* zdania.

3. $A \rightarrow (A \rightarrow B)$

Tutaj podstawiliśmy w (2) równoważność z (1).

4. $A \rightarrow B$

To zdanie powstaje z (3) poprzez tak zwaną zasadę kontrakcji, obowiązującej dla dowolnych zdań A i B.

5. A

Teraz, zgodnie ze zdaniem (1), podstawiliśmy znowu A zamiast $A \rightarrow B$. I tak za pomocą kuglarskich sztuczek wykazaliśmy, że całe zdanie jest prawdziwe! Reszta to już dziecinna zabawa: stosujemy *modus ponens* (patrz s. 38) do zdań 4 i 5, otrzymując w ten sposób:

6. B

Oznacza to: zdanie *B* jest prawdziwe i Angela Merkel jest cesarzową chińską!
Powyższy przykład pokazuje, że kiedy tylko sprzeczności otworzy się szparę w drzwiach, powstaje chaos – można dowieść każdego twierdzenia, jakkolwiek absurdalne by ono było, jego zaprzeczenia oczywiście również. Trzeba więc zbudować zaporę. Należałoby może w ogóle zabronić auoreferencyjnych zdań? Byłoby szkoda – istnieją i takie, które jak najbardziej mają sens, na przykład tytuł niniejszego rozdziału. Jest on też dobrze ugruntowany, ponieważ sam się opisuje, a nie tylko opowiada o swojej prawdziwości.
Jednak również dobrze ugruntowane twierdzenia mogą nas doprowadzić do sprzeczności, przynajmniej w języku potocznym. Co powiesz o takim zdaniu:

To zdanie składa się z siedmiu słów.

Zdanie jest dobrze ugruntowane – opisuje wyłącznie sprawdzalny fakt. I jest prawdziwe. Trudność powstaje, gdy przyjrzymy się negacji tego zdania:

To zdanie nie składa się z siedmiu słów.

Przelicz: zdanie ma osiem słów – czyli też jest prawdziwe. Dane zdanie jest prawdziwe i jego negacja również, to klasyczne naruszenie logicznej „zasady niesprzeczności". Sytuacja nie polepszy się, gdy zaczniemy od fałszywej liczby słów:

To zdanie składa się z ośmiu słów.
To zdanie nie składa się z ośmiu słów.

Sprzeczność można wytłumaczyć za pomocą pewnej właściwości języka, takiej mianowicie, że zdanie, gdy je zane-