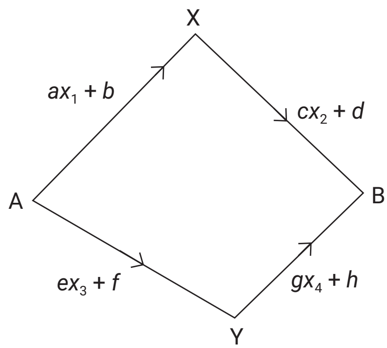
Okazuje się, że usunięcie pewnych połączeń może czasami rozładować ruch pomiędzy i wokół miejsc docelowych.

Spróbujemy to niewiarygodnie brzmiące stwierdzenie wyjaśnić na przykładzie i wyprowadzić warunki, które umożliwiają powstanie tego pożytecznego zjawiska. Jak już wspomnieliśmy, fenomen ten został po raz pierwszy opisany w 1969 r. przez niemieckiego matematyka Dietricha Braessa. Opublikował on wówczas krótki artykuł *On a paradox of traffic planning* w „Unternehmensforschung", t. 12, s. 258–268, który, proszę mi wierzyć, wprowadził w osłupienie osoby odpowiedzialne za sieci komunikacyjne w Niemczech.

Przystąpmy jednak do wyjaśnień. Wyobraźmy sobie dwa punkty: A i B pewnego miasta połączone dwiema różnymi jednokierunkowymi drogami. Jedna z nich prowadzi przez punkt X, druga przez punkt Y.



Funkcje liniowe $ax + b$ oznaczają koszty przejazdu przez daną trasę i zależą od x – liczby samochodów obecnych na drodze. Wartości kosztów korzystania z dróg mogą być wyrażone przez czas przejazdu lub przez konkretne kwoty pieniężne. Przykładowo, koszt skorzystania z trasy AX przez n pojazdów wynosi $an + b.$

Wyobraźmy sobie, że na trasach od A do B mamy n pojazdów, z tego k wybrało trasę przez X, zaś $n - k$ aut zdecydowało się skorzystać z trasy przez Y. Całkowity koszt obecności pojazdów w tej sieci wynosi zatem:

$$ak + b + ck + d + e(n - k) + f + g\ (n - k) + h.$$

Chcemy zminimalizować przeciętny koszt obecności n pojazdów w systemie.

Oczywiście, średni koszt obecności $S(k)$ n pojazdów w sieci (k na trasie przez X, $n - k$ na trasie przez Y) wynosi:

$$S(k) = \frac{k(ak+b+ck+d)+(n-k)[e(n-k)+f+g(n-k)+h]}{n} =$$
$$= \frac{k^2(a+c+e+g)+k(b+d-2ne-f-2ng-h)+n^2e+nf+n^2g+hn}{n}.$$

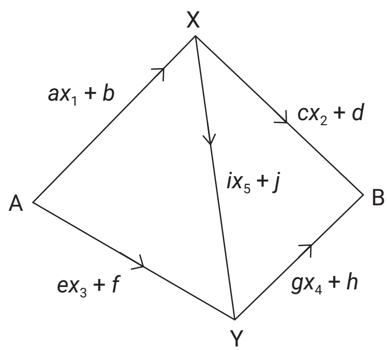
Z elementarnych własności funkcji kwadratowej otrzymujemy, że jej minimum osiągane jest dla: $k = \frac{f+2ng+2ne+h-b-d}{2(a+c+e+g)}$.

Gdy na przykład: $a=g$, $b=h$, $c=e$, $d=f$, otrzymamy: $k = \frac{n}{2}$, co jest absolutnie zgodne z intuicją.

Z drugiej strony, gdy koszty przejazdu przez X są dwukrotnie większe od tych przez Y, tzn. $a=c=2$, $g=e=1$, $b=d=f=h=0$, otrzymujemy: $k = \frac{n}{3}$.

Na razie wszystkie te wyliczenia są zgodne z naszymi przewidywaniami.

Teraz wyobraźmy sobie, że otwieramy dodatkowe połączenie pomiędzy X i Y. Wówczas sieć dróg wygląda następująco:



Aby rachunki były bardziej praktyczne, załóżmy: $a=10$, $b=0$, $c=1$, $d=50$, $e=1$, $f=50$, $g=10$, $h=0$ oraz $i=1$, $j=10$.