Założenie 5.16
Zmienna losowa Θ_i odpowiada profilowi ryzyka w i-tej grupie dla $i = 1, 2, \ldots, I$. Ponadto

(a) *przy zadanym Θ_i zmienne losowe X_{ij}, $j = 1, 2, \ldots, n$, są warunkowo niezależne oraz*

$$\mathbb{E}[X_{ij}|\Theta_i] = m(\Theta_i),$$
$$Var[X_{ij}|\Theta_i] = \frac{\sigma^2(\Theta_i)}{w_{ij}};$$

(b) *zmienne losowe $\Theta_1, \ldots, \Theta_I$ są niezależne i mają ten sam rozkład, a pary $(\Theta_1, \boldsymbol{X}_1), \ldots, (\Theta_I, \boldsymbol{X}_I)$ są niezależne, gdzie $\boldsymbol{X}_i = (X_{i1}, \ldots, X_{in})$ jest n-letnią obserwacją standaryzowanych łącznych szkód w i-tej grupie ryzyka.*

Model Bühlmanna–Strauba odpowiada następującemu mechanizmowi losowania warstwowego. W pierwszym losowaniu wybieramy profil ryzyka dla i-tej grupy ryzyka, zgodnie z rozkładem zmiennej losowej Θ_i. Wylosowany parametr ryzyka określa rozkład zmiennych losowych X_{ij} w i-tej grupie w drugim losowaniu. W ten sposób można modelować bardziej złożony portfel heterogeniczny, niż w punkcie 5.4.1, gdzie parametr ryzyka był wspólny dla całego portfela, podczas gdy obecnie jest on wspólny tylko dla i-tej grupy ryzyka i różni się między grupami.

Przykład 5.2
Przypuśćmy, że skumulowane szkody S_{ij} mają złożony rozkład Poissona (patrz definicja 1.17*) o intensywności $\lambda(\Theta_i)w_{ij}$, a wielkość pojedynczych szkód Y ma rozkład F_Y, który nie zależy od Θ_i. Ponieważ $X_{ij} = S_{ij}/w_{ij}$, po skorzystaniu z wzoru* (1.24) *otrzymujemy*

$$\mathbb{E}[X_{ij}|\Theta_i] = \lambda(\Theta_i)\mathbb{E}[Y|\Theta_i].$$

Postępując podobnie dla drugiej kumulanty złożonego rozkładu Poissona oraz korzystając z wzoru (1.24)*, otrzymujemy*

$$Var[X_{ij}|\Theta_i] = \frac{\lambda(\Theta_i)}{w_{ij}}\mathbb{E}[Y^2|\Theta_i].$$

Zatem założenie 5.16 jest spełnione z $m(\Theta_i) = \lambda(\Theta_i)\mathbb{E}[Y|\Theta_i]$ oraz $\sigma^2(\Theta_i) = \lambda(\Theta_i)E[Y^2|\Theta_i]$.

Interesować nas będzie indywidualna składka netto $\pi_{\Theta_i} = m(\Theta_i) = \mathbb{E}[X_{ij}|\Theta_i]$. W celu jej estymacji będziemy wykorzystywać portfelową składkę netto

$$\pi = \mathbb{E}[\pi_{\Theta_i}] = m_0,$$

która jest wartością oczekiwaną standaryzowanej łącznej szkody w całym portfelu. Podobnie jak w poprzednich rozdziałach, będziemy chcieli dla każdego $i = 1, 2, \ldots, I$ wyestymować składkę indywidualną netto $m(\Theta_i)$, wykorzystując dostępne dane w postaci wektorów $\boldsymbol{X}_i$, gdzie $\boldsymbol{X}_i = (X_{i1}, \ldots, X_{in})$. Obserwacje X_{ij} są znane na n lat wstecz dla każdej grupy ryzyka. Jako estymator indywidualnej składki netto przyjmiemy funkcję liniową obserwacji

$$\widehat{m(\Theta_i)} = a_{i0} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_{ij}, \tag{5.24}$$

gdzie a_{ij}, $i = 0, 1, \ldots, I$, są tak dobranymi współczynnikami rzeczywistymi, aby $\widehat{\pi(\Theta_i)} = \widehat{m(\Theta_i)}$ stanowiły dekompozycję znanej składki portfelowej π na i-tą grupę ryzyka. Ponieważ Θ_i jest zmienną losową oraz $\mathbb{E}[\pi(\Theta_i)] = \pi$, średnio biorąc $\widehat{\pi(\Theta_i)}$ powinno również dawać π, czyli $\mathbb{E}[\widehat{\pi(\Theta_i)}] = \pi$. Oznaczmy przez $\mathcal{L}$ klasę estymatorów liniowych, danych wzorem (5.24), które spełniają ten warunek. Niech $\mathcal{L}_0 \subseteq \mathcal{L}$ będzie klasą estymatorów *jednorodnych*, dla których $a_{i0} = 0$. W klasach $\mathcal{L}$ i $\mathcal{L}_0$ dobierzemy współczynniki estymatora $\widehat{\pi(\Theta_i)}$ w ten sposób, aby zminimalizować średniokwadratową stratę $\mathbb{E}\big[\sum_{i=1}^{I} \big(\pi(\Theta_i) - \widehat{\pi(\Theta_i)}\big)\big]^2$. Wykorzystamy w tym celu następujący lemat.

Lemat 5.17
Jeśli spełnione jest założenie 5.16 *oraz estymator* $\widehat{\pi(\Theta_i)} \in \mathcal{L}$, *to*

$$\mathbb{E}\Big[\sum_{i=1}^{I} \Big(\pi(\Theta_i) - \widehat{\pi(\Theta_i)}\Big)\Big]^2 = \sum_{i=1}^{I} \mathbb{E}\Big[\pi(\Theta_i) - \widehat{\pi(\Theta_i)}\Big]^2.$$

Dowód. Ponieważ estymator $\widehat{\pi(\Theta_i)}$ wykorzystuje dane $\boldsymbol{X}_i = (X_{i1}, \ldots, X_{in})$, z założenia 5.16

$$\mathbb{E}\left[\widehat{\pi(\Theta_i)}\widehat{\pi(\Theta_k)}\right] = \pi^2 \quad \text{dla} \quad i \neq k.$$

Podobnie niezależność $\Theta_1, \ldots, \Theta_I$ implikuje dla $i \neq k$ równość

$$\mathbb{E}\left[\pi(\Theta_i)\pi(\Theta_k)\right] = \pi^2.$$

Z założenia 5.16 wynika również, że dla $i \neq k$ mamy

$$\mathbb{E}\left[\pi(\Theta_i)\widehat{\pi(\Theta_k)}\right] = \pi^2.$$

Uwzględniając powyższe

$$\begin{aligned}
&Cov\Big(\pi(\Theta_i) - \widehat{\pi(\Theta_i)}, \pi(\Theta_k) - \widehat{\pi(\Theta_k)}\Big) = \mathbb{E}\left[\Big(\pi(\Theta_i) - \widehat{\pi(\Theta_i)}\Big)\Big(\pi(\Theta_k) - \widehat{\pi(\Theta_k)}\Big)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\pi(\Theta_i)\pi(\Theta_k)\right] - \mathbb{E}\left[\pi(\Theta_i)\widehat{\pi(\Theta_k)}\right] - \mathbb{E}\left[\pi(\Theta_k)\widehat{\pi(\Theta_i)}\right] + \mathbb{E}\left[\widehat{\pi(\Theta_i)}\widehat{\pi(\Theta_k)}\right] \\
&= 0, \quad \text{dla} \quad i \neq k.
\end{aligned}$$