razie zatrzymamy wszystkich trzech. Jeśli nie opuścił mnie zmysł logiki, to napadu dopuścili się we trójkę!

CAŁA PRAWDA I TYLKO PRAWDA Co asystent Hufnagel zapisał w swoim notatniku? Zredukował zeznania wszystkich trzech podejrzanych do ich logicznego jądra i przeanalizował je za pomocą odpowiedniej tablicy. Zanim jednak podążymy tym tropem, zróbmy małą wycieczkę i zajmijmy się podstawami rachunku zdań.

Rachunek zdań to najprostszy system logiczny, chociaż za jego pomocą można kodować dość złożone wypowiedzi. Rachunek zdań zajmuje się, jak sama nazwa wskazuje, zdaniami w sensie logicznym[1]. Są to zwykle pełne zdania, które mogą być albo prawdziwe, albo fałszywe. „Berlin jest stolicą Niemiec", „W poniedziałek będzie padał deszcz", „Elfy i trolle istnieją". Jak najbardziej mogą się wśród nich znaleźć zdania, co do których nie jesteśmy w stanie ocenić, czy są prawdziwe, czy fałszywe (na przykład, gdy wypowiedź dotyczy wydarzenia mającego zajść w przyszłości, jak w drugim przykładzie albo ponieważ nie jesteśmy w stanie sprawdzić stwierdzenia, jak w trzecim przykładzie). Do zdań w sensie logicznym nie należą na przykład rozkazy („Zjedz kolację!") i pytania („Będziesz mnie zawsze kochać?"). Żelazna reguła: jeśli przed zdaniem można umieścić słowa „Następujące zdanie jest prawdziwe" i wszystko razem ma sens, to mamy do czynienia ze zdaniem w sensie logicznym.

Ograniczenie do dwóch wartości, prawdy i fałszu, jest ważną cechą rachunku zdań – sprawia, że jest bardzo przejrzysty. W codziennym życiu czasem wzdragamy się przed

[1] W polskiej literaturze logicznej zdania w sensie logicznym są również nazywane „zdaniami o funkcji opisowej" lub „zdaniami o funkcji informacyjnej". Z punktu widzenia gramatyki języka polskiego „zdanie w sensie logicznym" to tyle, ile „zdanie oznajmujące" (przyp. red.).

takim czarno-białym widzeniem świata. Zdanie „HSV[1] to pierwszorzędny klub piłkarski" można w logice prawdy i fałszu łatwo zakwalifikować, jeśli „pierwszorzędny" zdefiniujemy jako „gra w pierwszej Bundeslidze[2]". Jeśli natomiast idzie o ocenę sposobu gry drużyny, to czasem będziemy zwlekać z przyznaniem mu atrybutu „pierwszorzędny", a po szczególnie nędznym meczu skłonni będziemy powiedzieć, że to tylko w połowie prawda. O takich „wielowartościowych" logikach traktuje rozdział trzynasty. W rachunku zdań zdania w sensie logicznym oznacza się często za pomocą dużych liter (*A*, *B*, *C*, …) i – jeśli są to zdania proste – to ich się nie rozkłada. Nowe zdania otrzymuje się, łącząc zdania ze sobą za pomocą tak zwanych funktorów zdaniotwórczych (spójników zdaniowych).
Ważnym funktorem jest funktor „negacji" – zamienia on każde zdanie w jego zaprzeczenie. W taki sposób ze zdania „Jutro będzie padać" powstaje zdanie „Jutro nie będzie padać". Jeśli *A* jest zdaniem, to zamiast „nie-*A*" piszemy $\neg A$ i można sporządzić tak zwaną tablicę prawdy[3], opisującą wartość logiczną $\neg A$.

A	$\neg A$
p	f
f	p

1 Hamburger SV – w skrócie HSV, niemiecki klub sportowy z siedzibą w Hamburgu (przyp. tłum.).

2 Bundesliga – najwyższa niemiecka klasa rozgrywkowa w piłce nożnej (przyp. tłum.).

3 Tablice prawdy nazywa się też tablicami prawdziwościowymi, szczególnie w podręcznikach akademickich, pracach naukowych, w filozofii logiki. Wyrażenie „tablice prawdy" częściej zaś występuje tam, gdzie logika formalna jest przedstawiana w kontekście informatyki, matematyki czy techniki (przyp. red. i tłum.).

Symbole „p” i „f” oznaczają „prawdę” i „fałsz”, a tabela mówi, że $\neg A$ jest fałszem, gdy A jest prawdą, a $\neg A$ jest prawdą, gdy A jest fałszem.
Rzecz jednak staje się interesująca dopiero wtedy, gdy dwa zdania łączymy ze sobą. Do tego służą (między innymi) funktory zdaniotwórcze (zwane też „spójnikami zdaniowymi”) „i”, „lub”, „jeżeli… to…” oraz „wtedy i tylko wtedy, gdy…”. Funktory zdefiniowane są całkowicie przez swoje tablice prawdy. Ponieważ dla dwóch zdań istnieją 4 kombinacje prawdy i fałszu, to do opisu danego funktora wystarczą 4 wiersze, na przykład dla funktora „i”, reprezentowanego symbolem daszku mamy:

A	B	$A \wedge B$
p	p	p
p	f	f
f	p	f
f	f	f

Funktor robi dokładnie to, czego od niego oczekujemy: zdania „A i B” są prawdziwe tylko wtedy, gdy zarówno A, jak i B jednocześnie są prawdziwe – w pozostałych trzech wypadkach są fałszem.
Funktor „alternatywy”, którego symbol przypomina literkę *v*, ma następującą tabelę prawdy:

A	B	$A \vee B$
p	p	p
p	f	p
f	p	p
f	f	f

W języku potocznym używamy dwóch rodzajów alternatywy. Po pierwsze – alternatywy rozłącznej, czyli słowa „lub” w sensie wykluczającym: „Na obiad będzie ryż lub makaron” – to zdanie większość zinterpretuje tak, że na obiad będzie albo ryż, albo makaron, a nie oba dodatki na raz. Natomiast zdanie „Jutro będzie padał deszcz lub śnieg” nie wyklucza, że zdarzy się i to, i to, czyli na przykład przelotny deszcz o poranku, który później przejdzie w deszcz. W logice prawie zawsze używa się tak zwanej „alternatywy zwykłej”, czyli „lub” w takim znaczeniu, przy którym zdanie złożone jest prawdziwe również wtedy, gdy oba zdania składowe są prawdziwe.

Jak wspomniano już w pierwszym rozdziale, najwięcej problemów wielu studentów ma z implikacją, ze spójnikiem „jeżeli… to”. „Jeżeli… to” sugeruje zawsze związek treściowy między oboma zdaniami, a ściśle biorąc nawet przyczynowość: „Jeżeli pada deszcz, to ulica jest mokra”. Ale również tutaj chodzi jedynie o czysto formalny związek, abstrahujący zupełnie od treści obu wypowiedzi. Implikacja definiowana jest następująco:

A	B	$A \to B$
p	p	p
p	f	f
f	p	p
f	f	p

Najlepiej można ją opisać za pomocą dwóch warunków: coś prawdziwego nie pociąga za sobą nic fałszywego, natomiast coś fałszywego może pociągać za sobą wszystko.

Od razu zagmatwany przykład: jak rzecz ma się ze zdaniem „Z nie-*A* wynika *A*”? Dla tego zdania można szybko utworzyć tabelkę, która ma tylko dwa wiersze:

A	$\neg A$	$\neg A \to A$
p	f	p
f	p	f

To oznacza, że zdanie „Gdy Christian Wulff nie jest prezydentem Niemiec, to Christian Wulff jest prezydentem Niemiec” w okresie sprawowania przez niego urzędu było zdaniem prawdziwym, dzisiaj natomiast jest zdaniem fałszywym! Zwariowane, prawda?
Natomiast funktor „*A* wtedy i tylko wtedy, gdy *B*” to funktor, który dość dokładnie odpowiada jego zastosowaniu w mowie potocznej. Nie można tylko znowu zbytnio się zastanawiać nad związkiem między *A* i *B* – logika nie dba o to, obchodzi ją wyłącznie to, czy wypowiedź jest prawdą czy fałszem. Wypowiedź jest prawdziwa, gdy oba zdania *A* i *B* mają tę samą wartość logiczną, a fałszywa w obu pozostałych wypadkach.

A	B	$A \leftrightarrow B$
p	p	p
p	f	f
f	p	f
f	f	p

Czy istnieje więcej funktorów zdaniotwórczych? Łatwo można stwierdzić, że dla funktora w ogóle łączącego jakieś dwa zdania można utworzyć dokładnie 16 różnych tablic prawdy i zdefiniować odpowiednio 16 funktorów (spójników zdaniowych). Lecz nie potrzebujemy tak wielu, ponieważ wszystkie można przedstawić jako kombinację funktorów dotychczas zdefiniowanych. A nawet tych nie potrzebowalibyśmy wszystkich – na przykład funktor „jeżeli *A*, to *B*” można przedstawić również jako „*B* lub nie-*A*”. Niech będzie to pierwsze twierdzenie logiczne, którego dowiedziemy. Sporządźmy w tym celu tablicę prawdy dla „*B* lub nie-*A*”:

A	B	$\neg A$	$B \vee \neg A$
p	p	f	p
p	f	f	f
f	p	p	p
f	f	p	p

Jest to dokładnie ta sama tablica prawdy co w definicji implikacji. Można więc ją opisać jako „*B* jest prawdą lub *A* jest fałszem, lub jedno i drugie”.
Łatwo można wykazać, że wszystkie funktory zdaniotwórcze można przedstawić jako kombinacje funktorów „nie” i „lub”. Redukcję funktorów można posunąć jeszcze dalej. Do tego potrzebujemy jednak nowego funktora, NAND, zwanego też „funktorem dysjunkcji” lub „funkcją Sheffera”. Z jego pomocą można skonstruować wszystkie inne funktory, łącznie z „nie”! „NAND” jest skrótem angielskiego not-and i jest dokładnie tym, co ten funktor przedstawia: wyrażenie „*A* NAND *B*” jest dokładną przeciwnością wyrażenia ze spójnikiem „i” – jest tylko wtedy fałszywe, gdy oba zdania *A* i *B* są prawdziwe. Przedstawmy to w postaci tablicy prawdy:

A	B	$A \mid B$
p	p	f
p	f	p
f	p	p
f	f	p