Ciągi – wybrane wątki

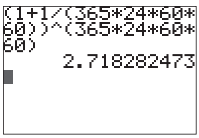
Zadania o ciągach powinny dotyczyć:

- wypisywania wartości wyrazów ciągu, jeśli dany jest wzór ogólny ciągu lub wzór rekurencyjny;
- odgadywania wzoru ogólnego lub wzoru rekurencyjnego, jeśli znamy kilka początkowych wyrazów ciągu;
- znajdywania wyrazu ogólnego ciągu arytmetycznego/geometrycznego, jeśli dane są dwa wyrazy tego ciągu;
- wyprowadzenia wzoru na sumę *n* początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego/geometrycznego;
- wzorów związanych z procentem prostym i procentem składanym.

Przykład[31]

Wyobraźmy sobie bank, który nalicza odsetki nie raz do roku, nie dwa razy, nie co miesiąc, lecz co sekundę. Jaką kwotę otrzymamy po roku, jeśli na początku roku wpłacimy do tego banku 1000 zł?

Spójrzmy na obliczenia wykonane na kalkulatorze TI (celowo zamiast 1000 wzięliśmy 1, aby uniknąć sygnalizowanego przez kalkulator *overflow*).



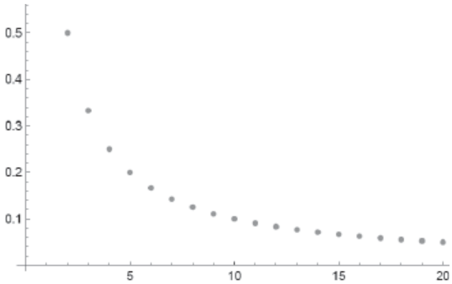
Dobre zadanie dla ucznia to wyjaśnienie, skąd wzięły się liczby na powyższym ekranie.

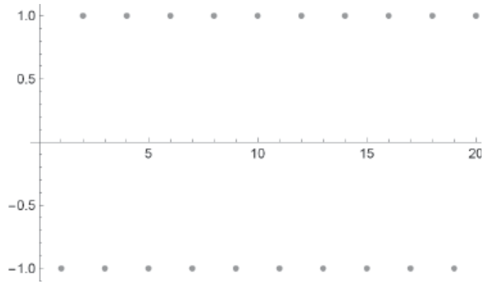
Granice ciągów

Na czym polega typowe podejście do problemu granicy ciągu liczbowego? W układzie współrzędnych rysuje się wykres ciągu (pewnej liczby jego wyrazów)

[31] Podobne zadanie znajduje się w materiale promocyjnym *Kalkulator graficzny TI-83. Kurs pierwszego stopnia*, Edukacja z TI, autorzy: Grażyna Miłosz, Agnieszka Orzeszek, Alina Walczak, Piotr Zarzycki.

i zauważa, że punkty wykresu się zbliżają (lub nie) do poziomej linii. Spójrzmy na wykresy dwóch ciągów: $(1/n)$, $\left((-1)^n\right)$.





W ten sposób wizualizujemy zbieżność lub rozbieżność ciągu liczbowego; nie zaniedbujmy tego etapu. Dalej pojawia się próba bardziej precyzyjnego wyjaśnienia, co dokładnie oznacza zbliżanie się wyrazów ciągu do pewnej liczby, i wreszcie zostaje podana precyzyjna definicja granicy ciągu liczbowego.

Tą drogą idą autorzy wielu podręczników. David Tall i Shlomo Vinner w pracy [TV] podają przykład z angielskiego podręcznika, w którym to podejście do ciągu jako funkcji ma konsekwencję w mniej znanej postaci definicji:

Definition. **If for every positive number k there is a number N such that**

$$i > N \Rightarrow |f(i) - c| < k,$$

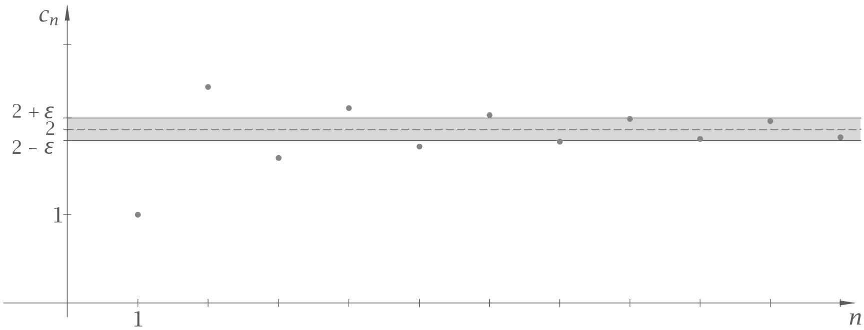
the sequence $\{f(i)\}$ has the *limit* c, and we write

$$f(i) \to c \text{ as } i \to \infty, \text{ or } \lim_{i \to \infty} f(i) = c.$$

Istnieją dwa niebezpieczeństwa związane z takim funkcyjnym wprowadzaniem granicy ciągu:

- duża grupa uczniów widząc dwuwymiarową wizualizację granicy ciągu interpretuje ją jako punkt (n_0, x_0);
- wiadomo, że każda funkcja $f: \mathrm{N} \to \mathrm{R}$ jest ciągła (zbiór N traktujemy jako przestrzeń z topologią dyskretną); może to stanowić późniejszy balast przy rozumieniu ciągłości funkcji definiowanej topologicznie.

Zanim przytoczymy klasyczną definicję zbieżności ciągu, przypomnijmy, że granice ciągów przewidziano tylko w zakresie rozszerzonym (to sensowne rozwiązanie) i granic ciągów nie oblicza się z definicji (mam wątpliwości, czy słusznie). Jeszcze przed zapisaniem formalnej definicji granicy ciągu warto pokazać uczniom dwie wizualizacje zbieżności na przykład ciągu $a_n = 2 + (-1)^n / n$.

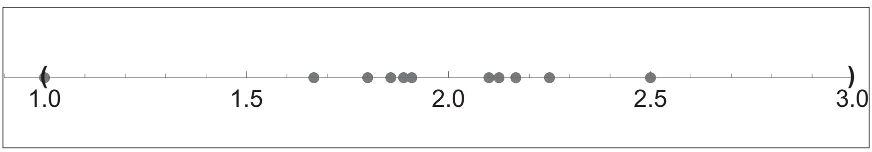


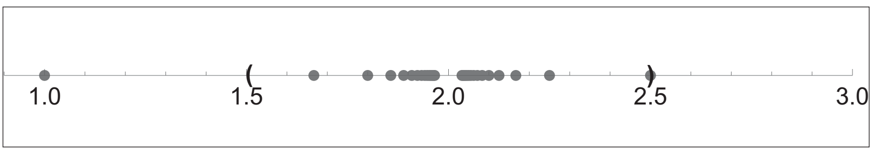
Szerokość szarego pasa wokół prostej $y = 2$ wynosi 2ε. Dla danego konkretnego ε z wykresu możemy odczytać począwszy od jakiego n punkty (n, a_n) leżą w szarym pasie.

Inną wizualizację uzyskamy w programie MATHEMATICA. Korzystamy tutaj z komendy **Manipulate**:

```
Manipulate[ListPlot[Table[{2+(-1)^n/n,0},{n,1,k,1}],PlotRange->{{0.9,3},
{-0.1,0.1}},Axes->{True,False},Prolog->PointSize[0.01]],{k,1,100,1}]
```

Spójrzmy na zrzuty ekranów dla dwóch różnych k (k oznacza liczbę pokazywanych wyrazów ciągu, na górnym rysunku $k = 11$, na dolnym $k = 31$).





Opcja Manipulate pozwala animować obrazek – widać wtedy, że wyrazy ciągu zbliżają się z obu stron do granicy równej 2. Dla $k = 11$ w przedziale $(1;3)$ $(\varepsilon = 1)$

są wszystkie wyrazy ciągu (a_n), oprócz pierwszego; dla $k = 31$ w przedziale $(1{,}5; 2{,}5)$ $(\varepsilon = 0{,}5)$ są wszystkie wyrazy ciągu (a_n), oprócz pierwszego i drugiego.

Zapytajmy uczniów, jak zapisać, że punkt o współrzędnych (n, a_n) mieści się w pasie szerokości 2ε lub przy drugiej wizualizacji, wyraz a_n znajduje się w przedziale $(2-\varepsilon, 2+\varepsilon)$. Być może niektórzy z nich wpadną na podwójną nierówność $2-\varepsilon < a_n < 2+\varepsilon$, którą możemy zapisać jako $|a_n - 2| < \varepsilon$. Teraz jesteśmy już gotowi do przytoczenia trudnej definicji granicy ciągu liczbowego:

Liczba g jest granicą ciągu liczbowego (a_n) *wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek: dla każdej liczby dodatniej* ε *istnieje taka liczba naturalna k, że dla wszystkich liczb naturalnych n takich, że* $n \geq k$ *zachodzi nierówność* $|a_n - g| < \varepsilon$.

Dowodzenie zbieżności ciągu z definicji jest zbyt trudne nawet dla studentów. Świadczą o tym wyniki ankiety, którą przeprowadziłem wśród studentów sekcji nauczycielskiej (studia magisterskie). Studenci otrzymali do krótkiego opracowania trzy zagadnienia:

1. Napisz poglądowo, co to znaczy, że ciąg liczb jest zbieżny do jakiejś liczby.
2. Napisz precyzyjną definicję zbieżności ciągu liczbowego do liczby *g*.
3. Pokaż formalnie, że ciąg $x_n = 1/n$ jest zbieżny do 0.

Oto odpowiedzi dotyczące pierwszego zagadnienia (sformułowania są autentyczne):

- Ciąg jest zbieżny do jakiejś liczby *g*, jeśli istnieje granica $x_n = g$ (najwięcej).
- Ciąg jest zbieżny do jakiejś liczby, tzn. że się do niej zbliża.
- Ciąg liczb jest zbieżny, gdy kolejne wyrazy ciągu dążą do jakiejś liczby.
- Ciąg jest zbieżny do jakiejś liczby, jeśli od pewnego miejsca wszystkie jego wyrazy znajdują się dowolnie blisko tej liczby.

Tylko jedna osoba podała wizualizację zbieżności przedstawioną na rysunku z wizualizacją dwuwymiarową (s. 109). Spośród odpowiedzi studentów dotyczących zagadnienia drugiego 57% było poprawnych, pozostałe zawierały istotne luki. Niepokój budzą próby studentów dowodu, że $\lim_{n\to\infty} 1/n = 0$. Tylko jedna osoba wskazała przepis na znajdowanie dla dowolnego $\varepsilon > 0$ takiego n_0, że dla $n > n_0$ spełniona jest nierówność $1/n < \varepsilon$. Bardzo często studenci pisali $\lim_{n\to\infty} 1/n = [1/\infty] = 0$. Więcej o problemie obliczania granic można znaleźć w [MPM] (s. 108–112).