6. Dla każdego $k \in \{1, \ldots, n\}$ parę sympleksów F'_k i G'_k możemy otrzymać w wyniku podziału sympleksu S o wierzchołkach $\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{v}_{i+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_{i+n}, \boldsymbol{u}_{i+n+1}$ hiperpłaszczyzną, w której leżą punkty $\boldsymbol{v}_{i+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_{i+n}$ i $\boldsymbol{u}_{i+k}$ (rys. 5.45g,h i 5.46g,h). Taki podział sympleksu S odpowiada wstawianiu węzła u_{i+k} (p. 5.5.10). Zatem suma funkcji miary przekroju sympleksów F'_k i G'_k, czyli również F_k i G_k, jest funkcją miary przekroju sympleksu S. Pozostaje obliczyć

$$\mathrm{fmp}(F) + \mathrm{fmp}(G) \;=\; \sum_{k=1}^{n}\bigl(\mathrm{fmp}(F'_k) + \mathrm{fmp}(G'_k)\bigr) \;=\; n\,\mathrm{fmp}(S)$$

i sprawdzić, że $\mu_{n+1}(S) = \frac{1}{n(n+1)}(u_{i+n+1} - u_i)$. $\square$

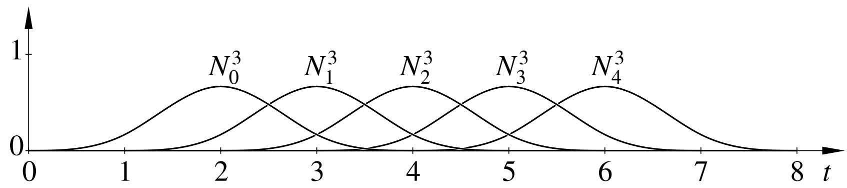
Związek sympleksów z funkcjami B-sklejanymi był po raz pierwszy opisany w artykule [63]. Można określić funkcję d zmiennych, która każdemu punktowi przestrzeni $\mathbb{R}^d$ utożsamionej z ustaloną podprzestrzenią d-wymiarową ℓ afinicznej przestrzeni $(n+d)$-wymiarowej E przyporządkowuje objętość n-wymiarową przecięcia pewnej figury B z odpowiednią n-wymiarową podprzestrzenią prostopadłą do ℓ. Jeśli figura B jest wielościanem, to otrzymamy w ten sposób funkcję kawałkami wielomianową stopnia n. Tak określone funkcje odpowiadające sympleksom, zwane **sympleksowymi funkcjami sklejanymi** (ang. *simplex splines*), są obecnie przedmiotem intensywnych badań, zobacz na przykład [183], [184], [188]). W praktycznych zastosowaniach spotyka się je jeszcze dosyć rzadko.

5.6. Krzywe B-sklejane z węzłami równoodległymi

Określenie krzywej B-sklejanej wymaga podania ciągu węzłów i ciągu punktów kontrolnych. O ile wpływ punktów kontrolnych na kształt krzywej jest intuicyjnie zrozumiały i w związku z tym dobieranie punktów kontrolnych jest raczej mało kłopotliwe, o tyle nie można tego samego powiedzieć o węzłach. Wpływ węzłów na kształt krzywej jest dosyć subtelny i wybór węzłów „najlepiej dostosowanych” do kształtu, który należy odtworzyć za pomocą krzywej B-sklejanej, jest nieoczywisty. Jedną z metod uniknięcia kłopotu z wyborem węzłów jest przyjęcie jednokrotnych węzłów równoodległych. Traci się wtedy możliwość modyfikowania krzywej przez zmienianie węzłów, ale za to zyskuje uproszczenie wielu wzorów i algorytmów. Bez straty ogólności można przyjąć $u_i = i$, $i = 0, \ldots, N$. Funkcje bazowe dla takiego ciągu węzłów spełniają warunek

$$N_i^n(t) \;=\; N_{i+k}^n(t+k). \tag{5.39}$$

Wykresy funkcji bazowych są identyczne z dokładnością do przesunięcia; przykład dla $n = 3$ możemy zobaczyć na rysunku 5.47. Nośnikiem funkcji N_i^n jest



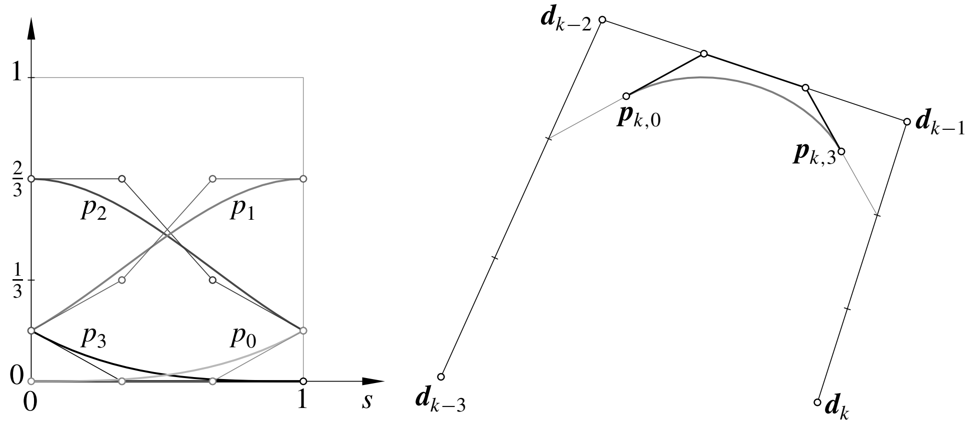
Rysunek 5.47. Wykresy funkcji N_i^3 dla węzłów równoodległych

przedział $[i, i+n+1]$, zatem wszystkie te funkcje możemy opisać za pomocą $n+1$ wielomianów stopnia n, $p_0(s), \ldots, p_n(s)$, których argumentem jest nowa zmienna $s = t - k$. Zachodzi równość $N_i^n(t) = p_{k-i}(s)$ dla $t \in [k, k+1)$, czyli dla $s \in [0, 1]$.

Krzywą B-sklejaną można narysować, wyznaczając punkty kontrolne Béziera łuków wielomianowych i następnie rysując te łuki. Łuk odpowiadający parametrowi $t \in [k, k+1)$ jest określony przez punkty $\boldsymbol{d}_{k-n}, \ldots, \boldsymbol{d}_k$, a jego reprezentacja Béziera składa się z punktów $\boldsymbol{p}_{k,0}, \ldots, \boldsymbol{p}_{k,n}$. Do ich znajdowania możemy używać takiej macierzy M o wymiarach $(n+1) \times (n+1)$, dla której

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_{k,0} \\ \vdots \\ \boldsymbol{p}_{k,n} \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} \boldsymbol{d}_{k-n} \\ \vdots \\ \boldsymbol{d}_k \end{bmatrix}.$$

Kolumny macierzy M są wektorami współczynników wielomianów $p_0, \ldots, p_n$ w bazie wielomianów Bernstena stopnia n.



Rysunek 5.48. Łuk wielomianowy krzywej B-sklejanej trzeciego stopnia
z węzłami równoodległymi i jego reprezentacja Béziera

Ćwiczenie. Wykaż, że dla $n = 3$ jest

$$M = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ćwiczenie. Znajdź macierz M dla $n = 4$.

Inna metoda polega na wygenerowaniu ciągu łamanych szybko zbiegającego do krzywej; kolejne łamane otrzymamy za pomocą wstawiania węzłów. Zamiast uniwersalnej metody Boehma lub algorytmu Oslo znacznie prościej jest użyć opisanego niżej **algorytmu Lane'a–Riesenfelda** [168], który wstawia nowe węzły w środkach przedziałów między węzłami początkowej reprezentacji. Inaczej mówiąc, algorytm ten dwukrotnie zagęszcza ciąg węzłów reprezentacji krzywej.

Aby wyprowadzić wzory, na których opiera się ten algorytm, rozważmy pochodną funkcji B-sklejanej stopnia $n > 0$. Przypuśćmy, że ciąg węzłów składa się ze wszystkich liczb całkowitych: $u_i = i$ dla $i \in \mathbb{Z}$. W tym przypadku wzór (5.13) przyjmuje postać

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} N_i^n(t) \;=\; N_i^{n-1}(t) - N_{i+1}^{n-1}(t).$$

Całkowanie pochodnej umożliwia odtworzenie funkcji. Ponieważ funkcja $N_0^0(t)$ określona dla przyjętego ciągu węzłów jest równa 1 dla $t \in [0, 1)$ oraz 0 poza tym przedziałem, korzystając ze wzoru (5.39), możemy obliczyć

$$\begin{aligned} N_i^n(t) &= \int_{-\infty}^{t} N_i^{n-1}(u) - N_{i+1}^{n-1}(u)\,\mathrm{d}u = \int_{t-1}^{t} N_i^{n-1}(u)\,\mathrm{d}u \\ &= \int_{\mathbb{R}} N_i^{n-1}(t-u) N_0^0(u)\,\mathrm{d}u. \end{aligned} \tag{5.40}$$

Otrzymane na końcu wyrażenie opisuje działanie zwane **splotem**, zastosowane do funkcji N_i^{n-1} i N_0^0. Działanie to zapisywane jest przy użyciu symbolu „$*$”, możemy zatem pisać $N_i^n = N_i^{n-1} * N_0^0$. Wizualizacja splotu jest pokazana na rysunku 5.49.

Niech $M_i^n(t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} N_0^n(2t - i)$. Funkcje M_i^n są funkcjami B-sklejanymi, których węzły są całkowitymi wielokrotnościami $\frac{1}{2}$. Nośnikiem funkcji M_i^n jest przedział $[\frac{i}{2}, \frac{i+n+1}{2}]$. Dla każdego $i \in \mathbb{Z}$ niech $\boldsymbol{c}_i$ oznacza pewien punkt. Wtedy dla $j = 0, 1, 2, \ldots$ istnieją krzywe B-sklejane stopnia j z punktami kontrolnymi $\boldsymbol{c}_i$:

$$\boldsymbol{s}^{(j)}(t) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \boldsymbol{c}_i N_i^j(t).$$