9

Aproksymacja w przestrzeniach operatorów

Spośród wielu rodzajów klas przestrzeni unormowanych, szczególną rolę odgrywają przestrzenie operatorów liniowych działających pomiędzy nimi. W tym rozdziale skupimy się na zagadnieniach aproksymacyjnych właśnie w przestrzeniach operatorów. Jeżeli $(X, \|\cdot\|_X)$ i $(Y, \|\cdot\|_Y)$ są przestrzeniami unormowanymi, to definiujemy przestrzeń unormowaną $(\mathcal{L}(X,Y), \|\cdot\|)$ jako przestrzeń operatorów liniowych i ciągłych $T : X \to Y$ ze standardowa normą operatorową, czyli $\|T\| = \sup_{x \in B_X} \|T(x)\|_Y$. Okazuje się, że taka przestrzeń zawsze jest przestrzenią Banacha, o ile tylko Y jest przestrzenią Banacha (zadanie 9.1). W szczególności, przestrzeń dualna do dowolnej przestrzeni unormowanej jest przestrzenią Banacha.

Przestrzenie operatorów są generalnie bardzo dalekie od posiadania własności ścisłej wypukłości (pomijając pewne przypadki szczególne). Większość zadań z tego rozdziału dotyczy proksyminalności pewnych podzbiorów przestrzeni operatorów, co jak wiemy z poprzednich rozdziałów, można uzyskać, opierając się raczej na własnościach topologicznych. Można jednak udowodnić, że pewne jednowymiarowe podprzestrzenie są Czebyszewa w przestrzeni operatorów pomiędzy rzeczywistymi przestrzeniami Hilberta (zadanie 9.8). Zadanie 9.7 służy tu jako wskazówka. Do obydwu tych zadań przydadzą się podstawowe własności przestrzeni ściśle wypukłych z rozdziału 6. Oprócz tego, do rozwiązywania innych zadań warto przypomnieć sobie zadanie 4.1 i twierdzenie 4 (Banacha–Alaouglu) z rozdziału pierwszego. Można będzie również wykorzystać następujące dwa twierdzenia: o $*$-słabej zbieżności i Tichonowa.

Twierdzenie 19 (O $*$-słabej zbieżności)**.** *Niech $(X, \|\cdot\|)$ będzie przestrzenią Banacha. Jeżeli ciąg $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ funkcjonałów z przestrzeni X^* jest zbieżny w topologii $*$-słabej do $f \in X^*$, to $\|f\|_* \leqslant \liminf_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\|_*$. Analogiczna własność zachodzi dla $*$-słabo zbieżnych ciągów uogólnionych.*

Twierdzenie 20 (Tichonowa)**.** *Iloczyn kartezjański dowolnej rodziny przestrzeni topologicznych zwartych jest zwarty.*

Zadanie 9.1. Niech X i Y będą przestrzeniami unormowanymi nad ciałem $\mathbb{K}$. Wykazać, że jeżeli Y jest przestrzenią Banacha, to przestrzeń operatorów $\mathcal{L}(X,Y)$ również jest przestrzenią Banacha.

Zadanie 9.2. Niech X, Z będą przestrzeniami Banacha, a $M > 0$ dowolną stałą. Niech

$$B_M = \{L \in \mathcal{L}(X, Z^*) : \ \|L\| \leqslant M\}\,.$$

W zbiorze B_M definiujemy topologię τ w następujący sposób: zbieżność ciągu uogólnionego względem τ: $L_t \to_\tau L$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego $x \in X$ mamy zbieżność $L_t(x) \to L(x)$ w $*$-słabej topologii w Z^*. Wykazać, że przestrzeń topologiczna (B_M, τ) jest zwarta.

Zadanie 9.3. Niech X, Z będą przestrzeniami Banacha, a $V \subseteq \mathcal{L}(X, Z^*)$ zbiorem niepustym i domkniętym względem topologii τ zdefiniowanej analogicznie jak w poprzednim zadaniu. Wykazać, że V jest zbiorem proksyminalnym w $\mathcal{L}(X, Z^*)$.

Zadanie 9.4. Niech X, Z będą przestrzeniami Banacha, $Y_1 \subseteq Z^*$ podprzestrzenią domkniętą w $*$-słabej topologii, a X_1 podprzestrzenią domkniętą X. Definiujemy przestrzeń $\mathcal{L}_{X_1}(X, Y_1)$ jako

$$\mathcal{L}_{X_1}(X, Y_1) = \{L \in \mathcal{L}(X, Z^*) \ : \ L(X) \subseteq Y_1, \ L|_{X_1} \equiv 0\}.$$

Udowodnić, że podprzestrzeń $\mathcal{L}_{X_1}(X, Y_1)$ jest proksyminalna w $\mathcal{L}(X, Z^*)$.

Zadanie 9.5. Niech X, Z będą przestrzeniami Banacha, $A \subseteq X$ niepustym zbiorem, a $B \subseteq Z^*$ zbiorem domkniętym w $*$-słabej topologii. Niech

$$U = \{L \in \mathcal{L}(X, Z^*) : L(A) \subseteq B\}$$

Wykazać, że U jest zbiorem proksyminalnym w $\mathcal{L}(X, Z^*)$.

Zadanie 9.6. Niech X, Z będą przestrzeniami Banacha, $n \geqslant 1$ liczbą całkowitą, natomiast $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ oraz $z_1, z_2, \ldots, z_n \in Z$ dowolnymi wektorami. Liczby rzeczywiste $a_1, a_2, \ldots, a_n$ oraz $b_1, b_2, \ldots, b_n$ spełniają nierówności $a_i \leqslant b_i$ dla $1 \leqslant i \leqslant n$. Niech

$$U = \{L \in \mathcal{L}(X, Z^*) : (Lx)z_i \in [a_i, b_i] \text{ dla } 1 \leqslant i \leqslant n\}\,.$$

Dowieść, że U jest zbiorem proksyminalnym w $\mathcal{L}(X, Z^*)$.

Zadanie 9.7. (*) Dana jest rzeczywista skończenie wymiarowa przestrzeń unormowana X oraz ściśle wypukła przestrzeń unormowana Y. Niech $S, T : X \to Y$ będą operatorami liniowymi takimi, że T jest operatorem różnowartościowym oraz spełniona jest równość

$$\|S - r_0 T\| = \|S\|$$

dla pewnej liczby $r_0 > 1$. Wykazać, że $\|S - T\| < \|S\|$.

Zadanie 9.8. (*) Dane są rzeczywiste przestrzenie Hilberta H_1, H_2 takie, że $\dim H_1 < \infty$ oraz $\dim H_1 \leqslant \dim H_2$. Niech $T : H_1 \to H_2$ będzie operatorem liniowym, który nie jest stale równy 0. Udowodnić, że rozpięcie liniowe $\mathrm{lin}\{T\}$ jest zbiorem Czebyszewa w przestrzeni $\mathcal{L}(H_1, H_2)$ wtedy i tylko wtedy, gdy operator T jest różnowartościowy.