W przypadku rotacji odpowiednie wersory obu baz nie są sobie równe. Wówczas dowolny wektor $\mathbf{f}$ można zapisać w obu układach jako

$$\mathbf{f} = f_x\mathbf{e}_x + f_y\mathbf{e}_y + f_z\mathbf{e}_z = f_\xi\mathbf{e}_\xi + f_\eta\mathbf{e}_\eta + f_\zeta\mathbf{e}_\zeta \tag{3.3}$$

Z powyższego równania wyznacza się związki między współrzędnymi wektora $\mathbf{f}$ w obu układach:

$$\left.\begin{aligned}
f_\xi &= \mathbf{f}\cdot\mathbf{e}_\xi = f_x\left(\mathbf{e}_\xi\cdot\mathbf{e}_x\right) + f_y\left(\mathbf{e}_\xi\cdot\mathbf{e}_y\right) + f_z\left(\mathbf{e}_\xi\cdot\mathbf{e}_z\right) = \\
&= f_x\cos\left(\widehat{\xi,x}\right) + f_y\cos\left(\widehat{\xi,y}\right) + f_z\cos\left(\widehat{\xi,z}\right) \\
f_\eta &= \mathbf{f}\cdot\mathbf{e}_\eta = f_x\left(\mathbf{e}_\eta\cdot\mathbf{e}_x\right) + f_y\left(\mathbf{e}_\eta\cdot\mathbf{e}_y\right) + f_z\left(\mathbf{e}_\eta\cdot\mathbf{e}_z\right) = \\
&= f_x\cos\left(\widehat{\eta,x}\right) + f_y\cos\left(\widehat{\eta,y}\right) + f_z\cos\left(\widehat{\eta,z}\right) \\
f_\zeta &= \mathbf{f}\cdot\mathbf{e}_\zeta = f_x\left(\mathbf{e}_\zeta\cdot\mathbf{e}_x\right) + f_y\left(\mathbf{e}_\zeta\cdot\mathbf{e}_y\right) + f_z\left(\mathbf{e}_\zeta\cdot\mathbf{e}_z\right) = \\
&= f_x\cos\left(\widehat{\zeta,x}\right) + f_y\cos\left(\widehat{\zeta,y}\right) + f_z\cos\left(\widehat{\zeta,z}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{3.4}$$

Związek odwrotny ma postać następującą:

$$\left.\begin{aligned}
f_x &= \mathbf{f}\cdot\mathbf{e}_x = f_\xi\left(\mathbf{e}_\xi\cdot\mathbf{e}_x\right) + f_\eta\left(\mathbf{e}_\eta\cdot\mathbf{e}_x\right) + f_\zeta\left(\mathbf{e}_\zeta\cdot\mathbf{e}_x\right) = \\
&= f_\xi\cos\left(\widehat{\xi,x}\right) + f_\eta\cos\left(\widehat{\eta,x}\right) + f_\zeta\cos\left(\widehat{\zeta,x}\right) \\
f_y &= \mathbf{f}\cdot\mathbf{e}_y = f_\xi\left(\mathbf{e}_\xi\cdot\mathbf{e}_y\right) + f_\eta\left(\mathbf{e}_\eta\cdot\mathbf{e}_y\right) + f_\zeta\left(\mathbf{e}_\zeta\cdot\mathbf{e}_y\right) = \\
&= f_\xi\cos\left(\widehat{\xi,y}\right) + f_\eta\cos\left(\widehat{\eta,y}\right) + f_\zeta\cos\left(\widehat{\zeta,y}\right) \\
f_z &= \mathbf{f}\cdot\mathbf{e}_z = f_\xi\left(\mathbf{e}_\xi\cdot\mathbf{e}_z\right) + f_\eta\left(\mathbf{e}_\eta\cdot\mathbf{e}_z\right) + f_\zeta\left(\mathbf{e}_\zeta\cdot\mathbf{e}_z\right) = \\
&= f_\xi\cos\left(\widehat{\xi,z}\right) + f_\eta\cos\left(\widehat{\eta,z}\right) + f_\zeta\cos\left(\widehat{\zeta,z}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{3.5}$$

Równania (3.4) i (3.5) można zapisać w postaci macierzowej:

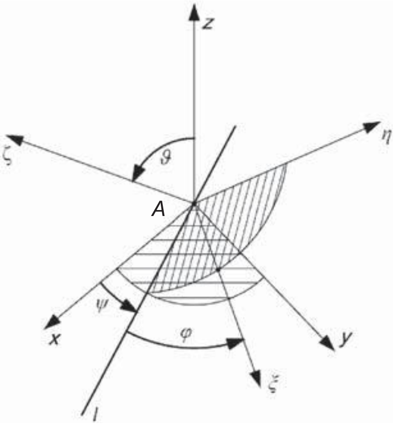
$$\begin{Bmatrix} f_\xi \\ f_\eta \\ f_\zeta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\left(\widehat{\xi,x}\right), & \cos\left(\widehat{\xi,y}\right), & \cos\left(\widehat{\xi,z}\right) \\ \cos\left(\widehat{\eta,x}\right), & \cos\left(\widehat{\eta,y}\right), & \cos\left(\widehat{\eta,z}\right) \\ \cos\left(\widehat{\zeta,x}\right), & \cos\left(\widehat{\zeta,y}\right), & \cos\left(\widehat{\zeta,z}\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{Bmatrix} \tag{3.6}$$

$$\begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\left(\widehat{\xi,x}\right), & \cos\left(\widehat{\eta,x}\right), & \cos\left(\widehat{\zeta,x}\right) \\ \cos\left(\widehat{\xi,y}\right), & \cos\left(\widehat{\eta,y}\right), & \cos\left(\widehat{\zeta,y}\right) \\ \cos\left(\widehat{\xi,z}\right), & \cos\left(\widehat{\eta,z}\right), & \cos\left(\widehat{\zeta,z}\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_\xi \\ f_\eta \\ f_\zeta \end{Bmatrix} \tag{3.7}$$

Występująca w równaniu (3.6) macierz cosinusów kierunkowych $\mathbf{c}$, a w równaniu (3.7) jej macierz transponowana $\mathbf{c}^T$, nosi nazwę macierzy przejścia (transformacji). Ponieważ elementy wierszy macierzy przejścia są współrzędnymi wersorów osi układu $A\xi\eta\zeta$ zapisanymi w układzie $Oxyz$ (podobnie elementy kolumn są współrzędnymi wersorów bazy układu $Oxyz$ zapisanymi w układzie $A\xi\eta\nu$), wynika stąd, że iloczyn dwóch wierszy (kolumn) jednoimiennych jest równy jedności, a iloczyn dwóch wierszy (kolumn) różnoimiennych – zeru. W macierzy przejścia tylko 3 elementy są liniowo niezależne, gdyż jej dziewięć współczynników musi spełniać dwanaście równań. Macierz $\mathbf{c}$ ma ponadto tę właściwość, że jej macierz odwrotna równa się macierzy transponowanej, tj. $\mathbf{c}^{-1} = \mathbf{c}^T$.

Przekształcenia układu $Oxyz$ w układ $A\xi\eta\zeta$ można dokonać na wiele sposobów, niekoniecznie dokonując jednej translacji $\mathbf{r}_A$ i jednej rotacji φ_A. Można dokonać na przykład szeregu translacji $\mathbf{r}_A^i$ takich, że $\sum_i \mathbf{r}_A^i = \mathbf{r}_A$ i szeregu rotacji równoważnych jednej rotacji φ_A, na przykład trzech rotacji zdefiniowanych następująco (rys. 3.2): 1) rotacja wokół osi Az o kąt ψ, zwany kątem precesji (oś Ox pokryje się wtedy z osią Al), 2) rotacja wokół osi Al o kąt ϑ, zwany kątem nutacji (oś Oz pokryje się wtedy z osią $A\zeta$), 3) rotacja wokół osi $A\zeta$ o kąt φ, zwany kątem obrotu właściwego (osie Ox i Oy pokryją się wtedy z osiami $A\xi$ i $A\eta$). Kąty: ψ, ϑ, φ noszą nazwę kątów Eulera. Każdemu z tych trzech obrotów odpowiada inna macierz przejścia $\mathbf{c}_i$, a mianowicie:

$$\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.8}$$



Rys. 3.2. Trzy kąty Eulera: ψ (precesji), ϑ (nutacji) i φ (obrotu właściwego)