

### 5.5.12. Sympleksowy dowód wzoru Mansfielda–de Boora–Coxa

Najważniejszym obok wzoru Boehma (5.17) wzorem rekurencyjnym opisującym funkcje B-sklejane jest wzór Mansfielda–de Boora–Coxa (5.9). W punkcie 5.2.3 udowodniliśmy ten wzór na podstawie definicji funkcji B-sklejanych opartej na pojęciu różnic dzielonych. Przyjrzyjmy się (przedstawionemu w skrócie) dowodowi tego wzoru opartemu na definicji sympleksowej.

1. Wybieramy wektory jednostkowe  $\mathbf{e}_{i+1}, \dots, \mathbf{e}_{i+n}$  prostopadłe do wektora  $\mathbf{e}$  (czyli do prostej  $\ell$ ) i do siebie nawzajem.

Wybieramy punkty  $\mathbf{u}_i, \dots, \mathbf{u}_{i+n+1}$ , które leżą na prostej  $\ell$  odpowiednio w hiperpłaszczyznach  $E_{u_i}, \dots, E_{u_{i+n+1}}$ , oraz liczby dodatnie  $a_{i+1}, \dots, a_{i+n}$ , takie że  $a_{i+1} = a_{i+n} = 1$  oraz  $\prod_{k=i+1}^{i+n} a_k = (n-1)!$ . Oznaczamy punkty  $\mathbf{v}_k = \mathbf{u}_k + a_k \mathbf{e}_k$  dla  $k \in \{i+1, \dots, i+n\}$ .

Funkcja miary przekroju sympleksu  $n$ -wymiarowego  $S_i$ , którego wierzchołkami są punkty  $\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_{i+1}, \dots, \mathbf{v}_{i+n-1}, \mathbf{u}_{i+n}$ , jest funkcją B-sklejaną  $N_i^{n-1}$ , a sympleks  $S_{i+1}$ , którego wierzchołkami są punkty  $\mathbf{u}_{i+1}, \mathbf{v}_{i+2}, \dots, \mathbf{v}_{i+n}, \mathbf{u}_{i+n+1}$ , w podobny sposób wyznacza funkcję  $N_{i+1}^{n-1}$  (rys. 5.45a,b i 5.46a,b).

2. Określamy figury

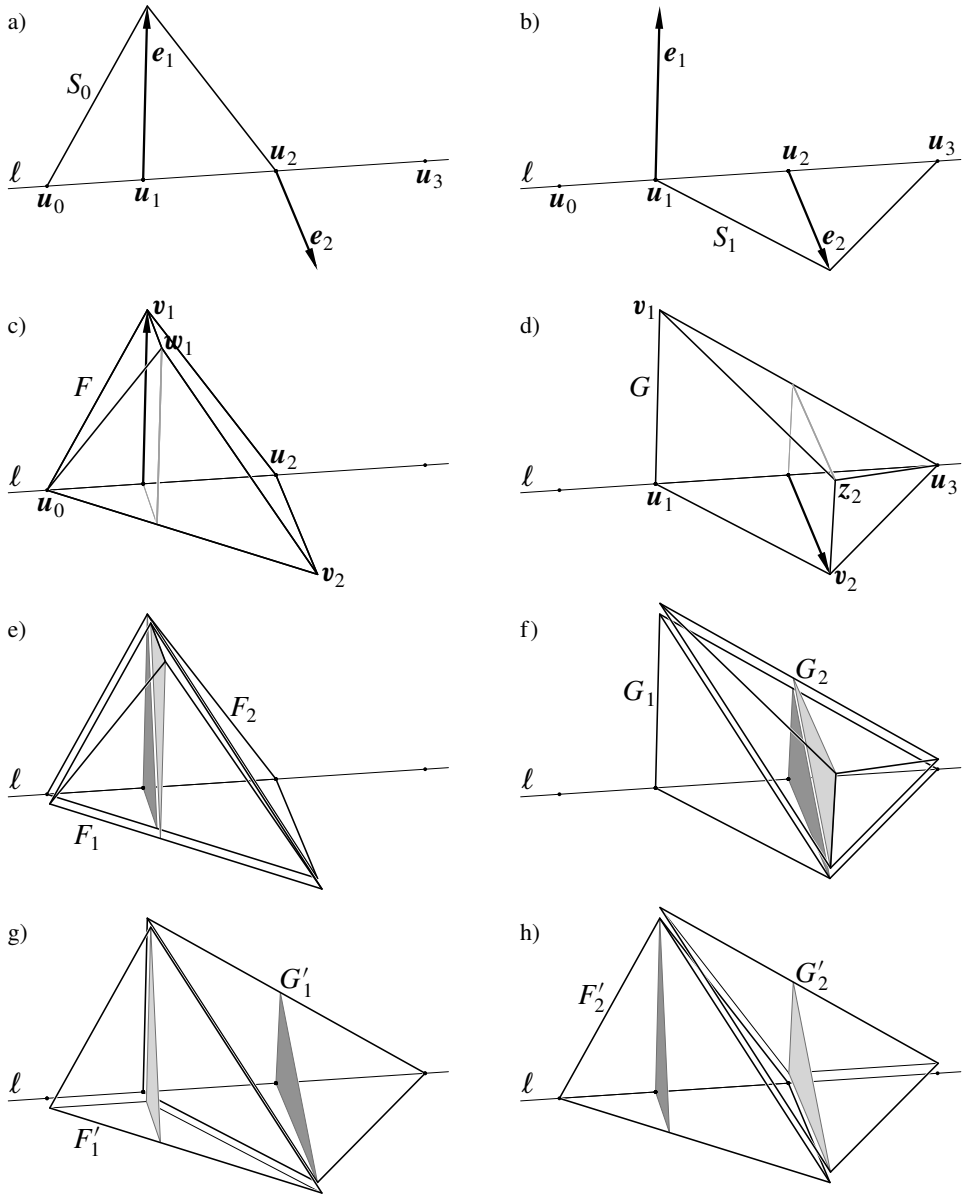
$$F = \left\{ \mathbf{p} = \mathbf{q} + s \frac{t-u_i}{u_{i+n}-u_i} \mathbf{e}_{i+n} : \mathbf{q} \in S_i \cap E_t, s \in [0, 1] \right\},$$

$$G = \left\{ \mathbf{p} = \mathbf{q} + s \frac{u_{i+n+1}-t}{u_{i+n+1}-u_{i+1}} \mathbf{e}_{i+1} : \mathbf{q} \in S_{i+1} \cap E_t, s \in [0, 1] \right\}.$$

Są one wypukłymi wielościanami  $(n+1)$ -wymiarowymi, a ich funkcje miary przekroju są równe odpowiednim składnikom po prawej stronie wzoru (5.9). Wierzchołkami wielościanu  $F$  są wszystkie wierzchołki sympleksu  $S_i$ , punkty  $\mathbf{w}_{i+1}, \dots, \mathbf{w}_{i+n-1}$ :  $\mathbf{w}_k = \mathbf{v}_k + (u_k - u_i)/(u_{i+n} - u_i) \mathbf{e}_{i+n}$ , oraz punkt  $\mathbf{v}_{i+n}$ . Podobnie, wierzchołkami wielościanu  $G$  są wszystkie wierzchołki sympleksu  $S_{i+1}$ , punkty  $\mathbf{z}_{i+2}, \dots, \mathbf{z}_{i+n}$ , takie że  $\mathbf{z}_k = \mathbf{v}_k + (u_{i+n+1} - u_k)/(u_{i+n+1} - u_{i+1}) \mathbf{e}_{i+1}$  i punkt  $\mathbf{v}_{i+1}$  (rys. 5.45c,d i 5.46c,d).

3. Niech  $F_k$  oznacza dla  $k \in \{1, \dots, n-1\}$  sympleks, którego wierzchołkami są punkty  $\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_{i+1}, \dots, \mathbf{v}_{i+k}, \mathbf{w}_{i+k}, \dots, \mathbf{w}_{i+n-1}, \mathbf{v}_{i+n}$ . Za pomocą wierzchołków  $\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_{i+1}, \dots, \mathbf{v}_{i+n}, \mathbf{u}_{i+n}$  określimy sympleks  $F_n$ . Podobnie określimy sympleks  $G_1$  o wierzchołkach  $\mathbf{u}_{i+1}, \mathbf{v}_{i+1}, \dots, \mathbf{v}_{i+n}, \mathbf{u}_{i+n+1}$  oraz sympleksy  $G_k$  o wierzchołkach  $\mathbf{v}_{i+1}, \mathbf{z}_{i+2}, \dots, \mathbf{z}_{i+k}, \mathbf{v}_{i+k}, \dots, \mathbf{v}_{i+n}, \mathbf{u}_{i+n+1}$ , dla  $k \in \{2, \dots, n\}$  (rys. 5.45e,f i 5.46e,f).

Założmy, że  $u_i < u_{i+1}$  i rozważmy przecięcie wielościanu  $F$  z hiperpłaszczyzną  $E_{u_{i+1}}$ . Jest ono sumą Minkowskiego sympleksu i odcinka równoległego do wektora  $\mathbf{e}_n$ . Możemy zauważyć, że przecięcia sympleksów  $F_1, \dots, F_n$  z hiperpłaszczyzną  $E_{u_{i+1}}$  są sympleksami, które stanowią triangulację figury  $F \cap E_{u_{i+1}}$



Rysunek 5.45. Ilustracja dowodu wzoru Mansfielda–de Boora–Coxa dla  $n = 2$

(podobną do triangulacji przedstawionej na rys. 5.44). Rozważmy prostą przechodzącą przez wierzchołek  $u_i$  i dowolny inny punkt  $p$  wielościanu  $F$ . Z wypukłości  $F$  wynika, że wspólny punkt tej prostej i hiperpłaszczyzny  $E_{u_{i+1}}$  należy do zbioru  $F \cap E_{u_{i+1}}$ , a zatem należy do pewnego sympleksu  $F_k$ . Łatwo jest spo-