Co mi daje pewność,
że na Jowiszu 2 + 2 nie jest 5?

(G. Brandes)

2

Loterie i szkolne wycieczki

W latach 60. ubiegłego wieku bardzo popularne były gry liczbowe. Prawie każde województwo miało swoją loterię liczbową. Na Górnym Śląsku była to „Karolinka", we Wrocławiu „Liczyrzepka", w Warszawie – „Syrenka", w Krakowie – „Lajkonik", w Łodzi „Kukułeczka" itp. Gracze w kioskach, zwanych kolekturami, składali kupony z pozaznaczanymi pięcioma liczbami wybranymi spośród 90.

Razem z ogólnopolskim Totolotkiem były nieodłącznym elementem polskiego folkloru. Teraz odeszły już w zapomnienie, wyparte przez konkursy i loterie organizowane przez sieci handlowe, koncerny czy organizacje charytatywne.

Obecnie loterie nie polegają już na typowaniu liczb i oczekiwaniu na losowanie. Największa loteria na świecie – hiszpańska loteria świąteczna, której losowanie odbywa się zawsze 22 grudnia, polega na zakupie losów z wydrukowanymi na nich liczbami pięciocyfrowymi, a w trakcie losowania wyjmowane są oznakowane piłeczki ze szczęśliwymi nagrodzonymi numerami.

Loterie współczesne polegają na kupnie zamkniętego losu. Po otwarciu od razu wiadomo, czy została nam przyznana nagroda i w jakiej wysokości, czy jest to los przegrywający – pusty. Dla zwiększenia atrakcyjności gry pojawiają się również losy neutralne pozwalające dokonać kolejnego losowania.

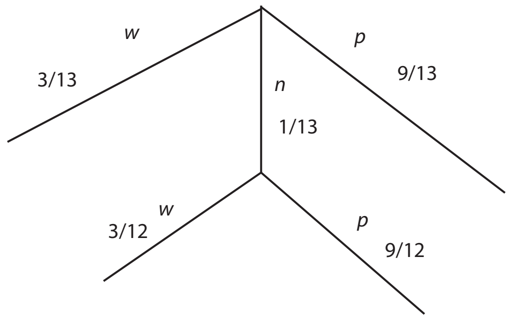
Omówimy szczegółowo przykład loterii z losami neutralnymi.

Początkowo załóżmy, że mamy do czynienia z loterią o 12 losach: 9 pustych i 3 wygrywające, bez losów neutralnych. Prawdopodobieństwo wygrania przy zakupie jednego losu wynosi

$$P(p=9, w=3, n=0) = P(0) = \frac{3}{12}.$$

W przypadku, gdy pojawi się dodatkowo jeden los neutralny, wówczas po kupieniu jednego losu możemy wygrać w dwóch przypadkach przedstawionych na rysunku:

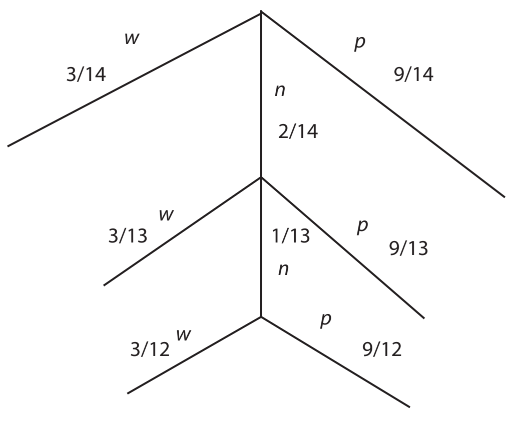
a) Pierwszy los może być wygrywający.
b) Pierwszy los neutralny, a drugi wygrywający.



Prawdopodobieństwo wygranej wynosi wtedy

$$P(p=9, w=3, n=1) = P(1) = \frac{3}{13} + \frac{1}{13}\cdot\frac{3}{12} = \frac{3}{13} + \frac{1}{13}\cdot P(0) = \frac{3}{12}.$$

W przypadku, gdy pojawią się dodatkowo dwa losy neutralne, po wykupieniu jednego losu możemy wygrać w trzech przypadkach:



a) Pierwszy los może być wygrywający.
b) Pierwszy los neutralny, a drugi wygrywający.
c) Pierwsze dwa losy są neutralne, a trzeci jest wygrywający.

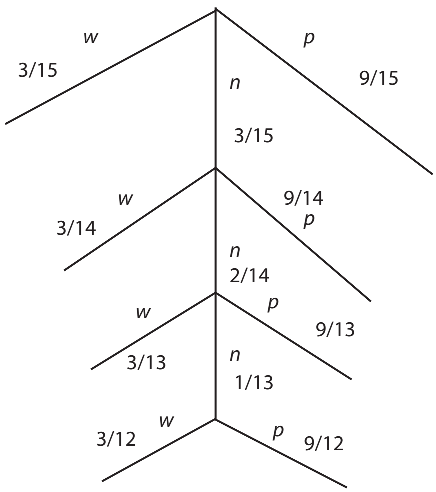
Prawdopodobieństwo wygranej wynosi wówczas

$$P(p=9, w=3, n=2) = P(2) = \frac{3}{14} + \frac{2}{14}\cdot\frac{3}{13} + \frac{2}{14}\cdot\frac{1}{13}\cdot\frac{3}{12} = \frac{3}{14} + \frac{2}{14}\cdot P(1) = \frac{3}{12}.$$

Zbadajmy jeszcze, co się dzieje w przypadku obecności trzech losów neutralnych. Po kupieniu jednego losu możemy wygrać w czterech przypadkach:

a) Pierwszy los może być wygrywający.
b) Pierwszy los neutralny, a drugi wygrywający.
c) Pierwsze dwa losy są neutralne, a trzeci jest wygrywający.
d) Pierwsze trzy losy są neutralne, a czwarty jest wygrywający.

Wszystkie te przypadki ilustruje rysunek:



Mamy wówczas

$$P(p=9, w=3, n=3) = P(3) = \frac{3}{15} + \frac{3}{15}\cdot\frac{3}{14} + \frac{3}{15}\cdot\frac{2}{14}\cdot\frac{3}{13} + \frac{3}{15}\cdot\frac{2}{14}.\frac{1}{13}\cdot\frac{3}{12}$$
$$= \frac{3}{15} + \frac{3}{15}\cdot P(2) = \frac{3}{12}.$$

Analizując powyższe przykłady, zauważamy, że być może prawdopodobieństwo wygrania nie zależy od liczby losów neutralnych, tylko od liczby pustych i zwycięskich.

Widzimy również, że w ogólnym przypadku, przy ustalonych wartościach liczby losów wygrywających i pustych oraz przy zmiennych wartościach liczby losów neutralnych zachodzi:

$$
\begin{aligned}
P(p,w,n) = P(n) &= \frac{w}{p+w+n} + \frac{n}{p+w+n}\cdot\frac{w}{p+w+n-1} \\
&+ \frac{n}{p+w+n}\cdot\frac{n-1}{p+w+n-1}\cdot\frac{w}{p+w+n-2} \\
&+ \frac{n}{p+w+n}\cdot\frac{n-1}{p+w+n-1}\cdot\frac{n-2}{p+w+n-2}\cdot\frac{w}{p+w+n-3} + \cdots \\
&\cdots + \frac{n}{p+w+n}\cdot\frac{n-1}{p+w+n-1}\cdot\frac{n-2}{p+w+n-2}\cdot\frac{n-3}{p+w+n-3}\cdots\frac{1}{p+w+1}\cdot\frac{w}{p+w}.
\end{aligned}
$$

Przekształcając, otrzymujemy

$$
P(p,w,n) = P(n) = \frac{w}{p+w+n}
+ \frac{n}{p+w+n}\left(
\begin{array}{l}
\frac{w}{p+w+n-1} + \frac{n-1}{p+w+n-1}\cdot\frac{w}{p+w+n-2} + \\
+ \frac{n-1}{p+w+n-1}\cdot\frac{n-2}{p+w+n-2}\cdot\frac{w}{p+w+n-3} + \cdots \\
\cdots + \frac{n-1}{p+w+n-1}\cdot\frac{n-2}{p+w+n-2}\cdot\frac{n-3}{p+w+n-3}\cdot\cdots \\
\cdots\cdot\frac{1}{p+w+1}\cdot\frac{w}{p+w}
\end{array}
\right).
$$

Oznacza to, że

$$P(n) = \frac{w}{p+w+n} + \frac{n}{p+w+n}P(n-1)$$

przy warunku

$$P(0) = \frac{w}{p+w}.$$

Jeżeli nasza hipoteza jest prawdziwa, to $P(n)$ jest stałe i wynosi: $\frac{w}{p+w}$.

Zbierając się na odwagę, podstawiamy tę wartość do wzoru:

$$\frac{w}{p+w+n} + \frac{n}{p+w+n}P(n-1) = P(n).$$

Dostajemy

$$\frac{w}{p+w+n}+\frac{n}{p+w+n}\cdot\frac{w}{p+w}=\frac{w}{p+w+n}\left(1+\frac{n}{p+w}\right)$$
$$=\frac{w}{p+w+n}\cdot\frac{p+w+n}{p+w}=\frac{w}{p+w}.$$

Udało się!!

Loterie, jak sama nazwa wskazuje, wiążą się z losowaniem. Bierzemy w nich udział z nadzieją na wygraną, na nagrodę. Sami, z nieprzymuszonej woli, czasem nawet płacimy za przywilej losowania. Wspomnijmy jeszcze o losowaniach innego typu. Otóż, bywa, że sami jesteśmy obiektem losowania. Wybieramy losowo grupy projektowe, osoby siedzące razem w ławce, grające przeciwko sobie mecze w turnieju, dzielące miejsca i rzędy w autobusie turystycznym itd. Ten typ losowania nie zawsze jest momentem oczekiwania na nagrodę czy zwycięstwo. Bywa, że nie chcemy być wylosowani, żeby nie dzielić pokoju z inną wylosowaną osobą, żeby nie grać przeciwko niewygodnemu przeciwnikowi itd.

Wyobraźmy sobie następującą sytuację. 10 osób w trakcie wycieczki ma spać w 5 dwuosobowych pokojach. Postanowiono, że każdy napisze swoje imię na karteczce i kolejno losowane osoby będą dzieliły ze sobą pokój. To znaczy: osoba wylosowana jako pierwsza będzie dzieliła pokój z drugą, trzecia z czwartą itd. Wiadomo, że w tej grupie są dwie nieznoszące się wzajemnie osoby. Jakie jest prawdopodobieństwo, że te osoby nie znajdą się ze sobą w pokoju?

Oznaczmy przez N1, N2 osoby, które się nie lubią, natomiast przez O1, O2, ..., O8 – pozostałe.

Weźmy pod uwagę przykładowe losowanie, w którym wrogowie nie znajdą się razem w pokoju:

(O1, O3), (O4, N1), (N2, O5), (O2, O6), (O7, O8) OOONNOOOOO,

i kolejne, w wyniku którego osoby, które się nie znoszą, znajdą się w jednym pokoju:

(O1, O3), (N2, N1), (O4, O5), (O2, O6), (O7, O8) OONNOOOOOO.

Zauważmy, że wszystkich możliwych losowań jest tyle, ile ciągów binarnych o 10 elementach składających się z dwóch zer i ośmiu jedynek, czyli $\binom{10}{2}$.

Liczba układów, które gwarantują nam, że dwie osoby, które się nie lubią, będą w osobnych parach, może być policzona jako liczba możliwych umieszczeń dwóch osób w pięciu różnych pokojach, czyli $\binom{5}{2}$ pomnożona przez 2^2, jako że osoba ta może być losowana w parze jako pierwsza albo druga. Otrzymamy zatem prawdopodobieństwo

$$\frac{\binom{5}{2}\cdot 2^2}{\binom{10}{2}} = \frac{8}{9}.$$

Gdy mamy do czynienia z $2n$ osobami, wśród których jest $k \leq n$ osób, które się nie lubią, prawdopodobieństwo, że osoby nielubiące się nie będą skazane na swoje towarzystwo w pokoju, wynosi

$$p(n,k) = \frac{\binom{n}{k}\cdot 2^k}{\binom{2n}{k}}.$$

Wykazaliśmy właśnie, że $p(5,2) = \frac{8}{9} \approx 0{,}89.$

Obliczmy jeszcze $p(5,3) = \frac{2}{3} \approx 0{,}66$, $p(5,4) = \frac{8}{21} \approx 0{,}38$ oraz $p(5,5) = \frac{8}{63} \approx 0{,}13.$

Sami oceńcie, czy warto ryzykować uczestnictwo w wycieczce z kimś, kogo się nie lubi, a nie chcąc się do tego przyznać, ryzykujemy wylosowanie tej osoby jako współtowarzysza nocy w namiocie. Dla mnie komfort jest na tyle ważny, że żadne liczby mnie nie przekonają.