

9. KIEDY LOGIKA WARIUJE

ALBO

SŁYNNNE PARADOKSY I JAK SIĘ JE ROZWIĄDUJE

Paradoksy cieszą wielkich i małych od czasów antycznych. Już filozof Zenon z Elei miał znać ich 40, 10 jego paradoksów dotrwało do naszych czasów, o dwóch możesz przeczytać poniżej.

Paradoks to opowiastka, która wywodzi w pole nasze myślenie. Zaczyna się niewinnie, ale dochodzi do wniosku, którego nie można pogodzić ze zdrowym rozsądkiem, albo dochodzi nawet do dwóch wniosków diametralnie sobie przeczących – oba naraz nie mogą być prawdziwe.

Nie wszystko, co nosi nazwę paradoksu, to przypadek dla księżeczki o logice. Mamy na przykład tak zwany paradoks dnia urodzin: ilu ludzi musi być na imprezie, żeby prawdopodobieństwo, że dwoje z nich ma urodziny tego samego dnia, było większe niż 50%? To zdumiewająco mała liczba, jest tak już przy 23 gościach, większość ludzi szacuje, że jest ona znacznie większa. Może dlatego, że myślą ją z pytaniem o prawdopodobieństwo, że dwoje ludzi ma urodziny w *określony* dzień – chodzi jednak o dowolny dzień. W tej kwestii nic jednak nie jest paradoksalne, pokazuje nam ona tylko, że pod względem prawdopodobieństw nasza intuicja nie jest zbyt rozwinięta.

Nie wszystkie z „greatest hits” paradoksów, prezentowanych przeze mnie poniżej, stanowią komplikacje ściśle logiczne. Przytaczam je jednak, ponieważ mimo to wywodzą nasz umysł w pole.

PARADOKS ACHILLESA Prawdopodobnie naj słynniejszy z paradoksów, autorstwa Zenona z Elei, znajdziesz go również na okładce tej książki. To opowieść o wielkim Achillesie i niepozornym żółwiu. Bohater trojański i gad biegną jako rywale w wyścigu. Ponieważ Achilles jest dużo szybszy, przyznaje żółwiowi pewne fory. Otóż Zenon argumentuje, że Achillesowi nigdy nie uda się żółwia dogonić – gdy tylko udaje mu się nadrobić przewagę, żółw posuwa się znowu kawałek do przodu. Achilles nadgania ten odcinek, lecz żółw umyka mu znowu. I tak dalej – odległość między nimi wprawdzie stale maleje, lecz bohater znajduje się zawsze w drodze do ostatniego miejsca pobytu żółwia, w którym tego dawno już nie ma.

Dziś paradoks nie jest w stanie zamieszać w głowach wielu ludziom. Obliczmy to na przykładzie. Achilles przebiega 10 metrów na sekundę, co odpowiada dobremu biegaczowi na 100 m. Żółw natomiast jest w stanie przebyć tylko 10 centymetrów na sekundę. Za to dostaje 100-metrowe fory.

Wyścig się rozpoczyna, po 10 sekundach Achilles jest w punkcie startowym żółwia, on jednak znajduje się już metr dalej, czyli przy 101 metrach. Aby przebyć ten metr, Achilles potrzebuje jednej dziesiątej sekundy, żółw w tym czasie przebywa 1 cm. Ten dystans Achilles przebiega w następnej jednej tysięcznej sekundy... i tak dalej. Sumując czasy otrzymujemy:

$$10 + 0,1 + 0,001 + 0,00001 + \dots = 10,101010101 \dots \text{ sekundy}$$

Punkt, w którym Achilles dogania żółwia, leży zaraz po przekroczeniu 100 metrów, a mianowicie w:

$$100 + 1 + 0,01 + 0,0001 + \dots = 101,01010 \dots \text{ metra}$$

Dzisiaj nie mamy problemu z obliczaniem tak małych odległości. Kryje się za tym matematyczny rachunek nieskończonościowy, czyli analiza wielkości nieskończenie małych, pozwalająca na dodawanie *nieskończenie* wielu liczb, uzyskując przy tym skończoną sumę. Mamy tu do czynienia z osiągnięciem XVII wieku – dla starożytnych Greków natomiast wyobrażenie, że nieskończenie wiele liczb można by było zsumować, otrzymując skończoną liczbę, było co najmniej niezwykle.

Achilles w każdym razie nie powinien się na tej myśli długo zatrzymywać: gdy za każdym razem doganiając żółwia, zatrzyma się choćby tylko na jedną milionową sekundy, to rzeczywiście nigdy nie dogoni przeciwnika.

PARADOKS WSZECHMOCY (OMNIPOTENCJI) Ten paradoks to kolejna próba zdobywania przewagi w sporach religijnych za pomocą logiki – doświadczenie uczy jednak, że w kwestiach wiary logika nie zaprowadzi nas daleko. Tym razem nie jest to żaden dowód na istnienie Boga, tylko próba dowiedzenia, że Bóg nie istnieje, mówiąc dokładniej, że nie istnieje wszechmogący Bóg. Jeśli Bóg jest wszechmogący, brzmi argument, to czy mógłby stworzyć kamień tak ciężki, że sam nie mógłby go podnieść?

Paradoks swoją strukturą przypomina bardzo „zbiór wszystkich zbiorów, które nie zawierają siebie samych jako elementu” (patrz s. 126). Logicznie można go sformułować w następujący sposób (zaoszczędzę sobie w tym miejscu przedstawienia za pomocą równań):

Niech a będzie istotą wszechmocną. Wtedy prawdziwe są następujące dwa twierdzenia:

1. dla wszystkich kamieni x zachodzi: a może podnieść x
2. dla wszystkich istot y zachodzi: a może stworzyć kamień x , którego y nie może podnieść.

(Twierdzenie 2 udowadnia, nawiasem mówiąc, jasno jak słońce, że może istnieć tylko jeden jedyny byt wszechmocny – bogowie wszechmogący występują wyłącznie w religiach monoteistycznych, w innych bogowie są niedoskonali, a nawet prowadzą między sobą wojny!).

Teraz należy postąpić dokładnie tak, jak zrobił to Bertrand Russell, czyli w twierdzeniu 2 podstawić a za y . Otrzymujemy wtedy dla kamienia x :

według twierdzenia 1: a może podnieść x .

według twierdzenia 2: a nie może podnieść x .

Z przesłanek wynika więc twierdzenie i jego dokładne przeciwieństwo. Z czysto logicznego punktu widzenia można więc szybko dojść do wniosku, że ze sprzecznych przesłanek wywnioskować można wszystko, dlatego takie założenia są niedopuszczalne. Czy to oznacza, że w teologii może to wywołać podobny wstrząs, jak antynomia Russella w teorii mnogości?

Raczej nie. Teologowie i filozofowie dyskutowali ten problem przez setki lat, wysuwając propozycje przeróżnych rozwiązań. Ostatecznie chodzi o to, czy byt wszechmocny może dokonać czegoś, co *logicznie jest niemożliwe*. Zamiast kamienia można powierzyć mu też zadanie skonstruowania czterościanego trójkąta lub liczby pierwszej podzielnej przez 4. Osobiście najbardziej podoba mi się odpowiedź scholastycznych konserwatystów: byt, który sam stworzył prawa logiki, nie musi postępować zgodnie z nimi – i stworzyć kamień, którego sam nie może podnieść.

PARADOKS BERRY'EGO O tym paradoksie wspominał po raz pierwszy Bertrand Russell w 1908 roku, przypisując go pewnemu bibliotekarzowi oksfordzkiemu o nazwisku G. G. Berry. Przedmiotem paradoksu jest pewna tajemnicza liczba, a mianowicie: